

Задачи на построение

Автор: Куликова А.К., учитель математики

Задача на построение заключается в том, что требуется построить определённым ранее инструментами некоторую геометрическую фигуру, которая находится в указанных отношениях с другими фигурами. Если о какой-либо фигуре говорится, что она дана, то подразумевается, что эта фигура уже построена. При этом считается, что:

- если две фигуры построены, то можно установить пересекаются они или нет;
- если пересечение двух построенных фигур имеет место быть, то оно построено;
- можно построить точку, принадлежащую построенной фигуре;
- можно построить точку, не принадлежащую построенной фигуре.

В качестве инструментов геометрических построений в школьном курсе геометрии используют только линейку и циркуль. При этом предполагается, что линейка как инструмент геометрических построений не имеет масштабных делений. Линейка позволяет провести произвольную прямую, а циркуль - окружность произвольного радиуса с центром в произвольной точке.

Описание простейших задач на построение, которые позволяют решать линейка и циркуль, обычно даётся в виде аксиом. Эти аксиомы выражают свойства реальных инструментов – линейки и циркуля, которые известны из практики.

Аксиома линейки. Линейка позволяет выполнять следующие геометрические построения:

- а) построить прямую, проходящую через две построенные точки;
- б) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;
- в) построить луч с началом в построенной точке, проходящий через другую построенную точку.

Аксиома циркуля. Циркуль позволяет построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности.

Решить задачу на построение – это значит свести её к конечной последовательности простейших построений, перечисленных в аксиомах.

На практике разбивка каждой задачи на простейшие построения является не рациональным действием. Обычно построение искомой фигуры сводят к некоторым наиболее типичным, часто встречающимся комбинациям простейших построений. Эти комбинации называют *основными построениями*. Умение решать задачи на построение во многом зависит от умения быстро и правильно выполнять эти основные построения. Полезно составить справочник основных построений, который будет пополняться по мере изучения материала. В этот справочник уже можно внести следующие основные построения:

Построение 1. Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.22).

Построение 2. Отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 3. Построить биссектрису данного неразвёрнутого угла (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 4. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. Данная точка лежит на данной прямой (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 5. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. Данная точка не лежит на данной прямой (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 6. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 7. Построить середину данного отрезка (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.23).

Построение 8. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.38).

Построение 9. Построить треугольник по стороне и прилежающим к ней углам (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.38).

Построение 10. Построить треугольник по трём сторонам (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. *Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы.* - М.: Просвещение, 2014, п.38).

Обычно при решении задач на построение выделяют четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование.

Анализ – поиск способа решения задачи. При проведении анализа задачу предполагают уже решённой и выполняют вспомогательный чертёж, изображающий искомую и данные фигуры. Поэтому чертежу с помощью известных геометрических теорем устанавливают зависимости между данными фигурами и искомой; находят последовательность основных построений, выполнение которых позволяет построить некоторую фигуру.

Построение состоит в непосредственном выполнении и перечислении основных построений, ведущих к построению искомой фигуры.

Доказательство заключается в том, чтобы показать, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование состоит в поиске ответа на два вопроса:

- при любом ли выборе данных задача имеет решение?
- Сколько различных решений может иметь задача в зависимости от выбора данных?

При определении числа решений различают два типа задач на построение. К первому типу относятся задачи, в которых положение искомой фигуры по отношению к данным фигурам не играет роли. В этих задачах все равные друг другу фигуры, удовлетворяющие условию задачи, считаются как одно решение. Второй тип составляют задачи, в которых требуется определить положение искомой фигуры относительно некоторых из данных фигур. Здесь две фигуры, удовлетворяющие условиям задачи и отличающиеся своим положением относительно указанных данных фигур, считаются различными, даже если они равны друг другу.

Задача 1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

Анализ. Задача решена и треугольник ABC – искомый: AB , AC – данные стороны, AA_1 – данная медиана. На луче AA_1 отметим точку D , такую, что $AA_1=A_1D$. Треугольники AA_1C и DA_1B равны по двум сторонам и углу между ними (одна пара сторон, равных по построению, вторая пара равных сторон – по определению медианы, углы при вершине A_1 – вертикальные). Поэтому в треугольнике ABD известны все три стороны – AB – данная, $BD=AC$ и $AD=2AA_1$. Треугольник ABD строится по трём сторонам. Точка A_1 является серединой стороны AD этого треугольника, а вершина C искомого треугольника лежит на луче BA_1 так, что $BA_1=A_1C$ (рис.1).

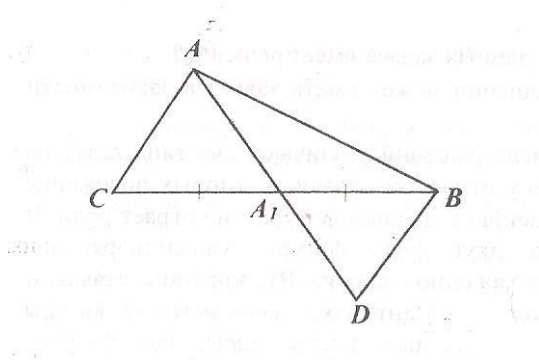


рис.1

Построение. Пусть b , c – данные стороны, m_a – данная медиана (рис.2).

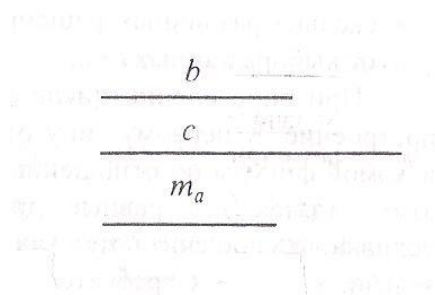


рис.2

- 1) Строим отрезок AD . Для этого проводим луч с началом в некоторой точке A и на нём дважды последовательно откладываем отрезки AA_1 и A_1D , равные отрезку m_a (основное построение 1).
- 2) Строим $\triangle ADB$ по трём сторонам AD , b , c (основное построение 10).
- 3) Строим луч BA_1 (аксиома линейки).

- 4) На луче BA_1 от точки A_1 откладываем отрезок A_1C , равный отрезку BA_1 (основное построение 1).
- 5) Строим отрезок AC (аксиома линейки).

Доказательство. То, что треугольник ABC – искомый, непосредственно следует из наших построений 1 и 2 ($AA_1=m_a$, $AB=c$) и равенства треугольников AA_1C и DA_1B , в которых $AC=BD=b$.

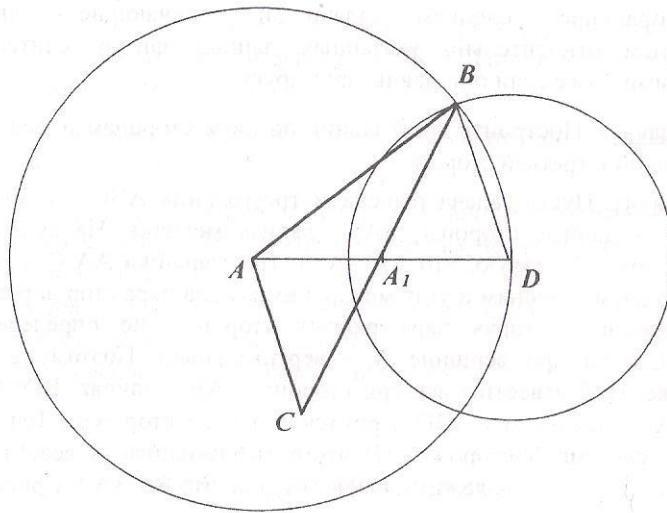


рис.3

Исследование. Задача не имеет решения, если $a+b \leq 2m_a$, или $a+m_a \leq b$, или $b+2m_a \leq a$, так как сторона треугольника не может быть больше или равна сумме двух других сторон, во всех остальных случаях задача имеет решение. Если задача имеет решение, то оно единственное.

Задачи и упражнения

1. Заведите справочник по геометрии и запишите в него основные построения 1-10.
2. Постройте треугольник по двум углам и периметру.
3. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них.
4. Постройте треугольник по углу, биссектрисе этого угла и стороне, к нему прилежащей.
5. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углу, который они образуют.

6. Постройте треугольник по медиане и углам, на которые она разбивает угол треугольника.

Литература:

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы. - М.: Просвещение, 2014.